Freie Universität Berlin

Übungen zur Quantenmechanik

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 14

Grundlagen der Quantenmechanik

Abgabe: 8.2.2018 K. Bolotin, J. Eisert

Modelle mit verborgenen Variablen (*hidden variable models)* sind alternative Beschreibungen der Realität, wie sie von Physikern des 20. Jahrhunderts vorgeschlagen wurden, um die klassisch kontraintuitive Phänomenologie der Quantenmechanik zu erklären. Solche Modelle versuchen klassische Erklärungen für wichtige Aspekte der Quantenmechnik wie zum Beispiel Verschränkung oder Unschärfe zu liefern. Wir untersuchen solche Modelle also, um herauszufinden, ob die Besonderheiten der Quantenmechanik irreduzible Aspekte der Theorie sind, oder ob sie natürlicherweise klassisch erklärt werden können.

Auf diesem Blatt wollen wir einige der bahnbrechenden No-Go Resultate herleiten, die naheliegende Beschreibungen der Quantenmechanik mit verborgenen Variablen ausschließen Genauer leiten wir die Theoreme von Bell und Kochen-Specker her, die sogenannte lokale und nichtkontextuelle Modelle mit verborgenen Variablen für die Quantenmechanik ausschließen. Bevor wir das tun, werden wir uns zunächst mit den Konzepten der Nichtlokalität und Nichtkontextualität vertraut machen.

Definition. Ein Modell mit verborgenen Variablen (HVM) für eine Menge von Quantenzuständen $\mathcal{R} := \{\rho_i\}_i$ und Observablen $\mathcal{O} := \{O_j\}_j$ ist ein Paar (Λ, q), wobei $\Lambda := \{\lambda_k\}_k$ Abbildungen $\lambda : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, und q eine Abbildung $\mathcal{R} \to \mathrm{Prob}(\Lambda) : \rho \to q_\rho$ ist. Hier ist $\mathrm{Prob}(\Lambda)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über Λ. Die Funktionen λ werden often "Zustände verborgener Variablen" (*hidden-variable states*) oder "Belegung verborgener Variablen" (*hidden-variable assignments*) genannt. Die Verteilungen q_ρ sind Repräsentationen von Quantenzuständen mit verborgenen Variablen. Um konsistent mit der Quantenmechanik zu sein, muss ein HVM die Ausgänge aller quantenmechanischen Messungen reproduzieren bzw. mit diesen konsistent sein.

Der Einfachheit halber wollen wir uns auf diesem Blatt jedoch auf Modelle beschränken, die lediglich die quantenmechanischen Erwartungswerte reproduzieren, also solche, die die folgende Identität erfüllen:

$$\langle O\rangle_\rho = \mathrm{tr}\,(O\rho) = \sum_{\lambda\in\Lambda} q_\rho(\lambda)\lambda(O), \qquad \forall O \in \mathcal{O}, \rho \in \mathcal{R}. \tag{1}$$

Kontextualität. HVMs der obigen Form werden *nichtkontextuell* genannt. (Die Bedeutung dieses Begriffs werden wir weiter unten untersuchen und verstehen.)

43. **Eigentschaften verborgener Variablen.** [2 + 2 + 2 + 1 = 7 Punkte]

Wir beginnen damit, einige grundlegende Eigenschaften von Modellen mit verborgenen Variablen zu verstehen.

a) *(Realismus.)* Argumentieren Sie kurz, dass wir, sollte eine nichtkontextuelle Beschreibung der Quantenmechanik existieren, die Werte von quantenmechanischen Observablen als "real" interpretieren können in dem Sinne, dass ihre Werte nicht notwendigerweise durch den Akt des Beobachtens festgelegt werden.

b) *(Anforderungen an verborgene Variablen.)* Erinnern Sie sich, dass der Ausgang der Messung einer quantenmechanischen Observablen $O \in \mathcal{O}$ ein Eigenwert von O

ist. Verwenden Sie diese Tatsache um zu zeigen, dass für jedes Tripel kommutierender Observablen $A, B, AB \in \mathcal{O}$, die Belegung der verborgenen Variablen folgende Gleichung erfüllen muss:

$$\lambda(AB) = \lambda(A)\lambda(B). \tag{2}$$

c) *(Verhältnis zu Lokalität.)* Betrachten Sie ein m-partitetes System $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_m$. Die Menge der erlaubten Observablen $\mathcal{O}$ bestehe aus allen "lokalen" Observablen der Form $A_i := I^{\otimes i-1} \otimes A \otimes I^{\otimes m-i}, i = 1, \ldots, m$, sowie Produkte/Korrelatoren dieser. Zeigen Sie, dass die Belegung der verborgenen Variablen λ lokal sein muss in dem Sinne, dass

$$\lambda(A_1 A_2 \cdots A_m) = \lambda(A_1)\lambda(A_2) \cdots \lambda(A_m)\,. \tag{3}$$

Was können wir über das Verhältnis zwischen Nichtkontextualität und Lokalität schließen?

Hinweis: Verwenden sie vollständige Induktion.

d) *(Von Sinn und Bedeutung.)* Lassen Sie uns zu den Definitionen zurück kommen. Diskutieren Sie kurz, warum in einem lokalen Modell mit verborgenen Variablen der Akt der Messung von A_1 den Ausgang einer Messung von A_m nicht beeinflusst? In welchem Sinne spiegelt Gl. (3) also Lokalität wieder? Allgemeiner, diskutieren Sie warum in einem nichtkontextuellen Modell der Wert von A nicht davon abhängt ob gleichzeitig eine zweite Observable B gemessen wird. Was bedeutet also der Begriff Kontextualität in diesem Kontext?

44. **Modelle mit verborgenen Variablen für Quantensubtheorien. Eigenschaften verborgener Variablen.** [$3 + 3 = 6$ Punkte]

Wie schwierig ist es, Modelle mit verborgenen Variablen für die Quantenmechanik zu finden? In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass diese Aufgabe für Subtheorien der Quantenmechanik sehr einfach sein kann. Eine *Subtheorie der Quantenmechanik* ist ein physikalisches Modell, in dem die Anzahl an Zuständen, die präpariert, und Observablen, die gemessen werden können, eingeschränkt ist. Das kann ganz natürlicherweise passieren, zum Beispiel, durch Einschränkungen die ein spezifischer Aufbau im Labor hat.

a) Betrachten Sie eine Subtheorie, in der nur ein Ein-Qubitzustand $\mathcal{R} = \{|0\rangle\}$ sowie zwei Messungen $\mathcal{O} = \{\sigma_x, \sigma_z\}$ erlaubt sind. Finden Sie ein nichtkontextuelles Modell mit verborgenen Variablen für diese Subtheorie.

Hinweis: Berechnen Sie die Erwartungswerte von σ_x, σ_z und überlegen Sie, wie diese in einem HVM reproduziert werden können.

b) Betrachten Sie die Subtheorie, die aus *allen* Quantenzuständen, aber nur einer einzigen (aber beliebigen) Observablen A besteht. Zeigen Sie, dass diese Subtheorie ein nichtkontextuelles Modell mit verborgenen Variablen erlaubt.

Hinweis: Verwenden Sie die Eigenwertzerlegung von A.

45. **Ein algebraischer Beweis von Bells Theorem**. [$4 + 2 + 2 = 8$ Punkte]

In der Vorlesung haben Sie einen Beweis von Bell's Theorem gesehen, der auf einer Lokalitätsungleichung beruht. In dieser Aufgabe wollen wir uns nun mit einem Theorem beschäftigen, dass mathematisch eleganter bewiesen werden kann, nämlich nur auf der Basis von Antikommtuationsrelationen. In der Tat werden wir ein stärkeres, bahnbrechendes Resultat beweisen, das Theorem von *Kochen-Specker*, das jegliche

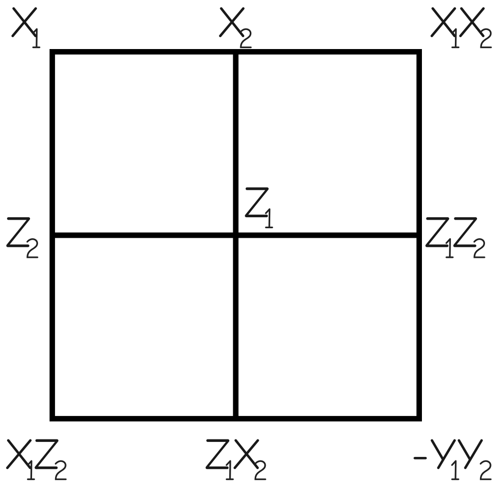

Abbildung 1: Das Mermin-Peres Quadrat. Möglicherweise der schönste Beweis des Theorems von Kochen-Specker.

nichtkontextuellen Beschreibungen mit verborgenen Variablen für die Quantenmechanik ausschließt. Die Resultate von Bell, Kochen und Specker etablieren zeigen, dass die Quantenmechanik eine intrinsisch *nichtlokale* und *kontextuelle* Theorie ist.

Unser Beweis wird auf dem mächtigen Mermin-Peres Quadrat (Fig. 1) beruhen! Dieses Quadrat repräsentiert eine Subtheorie der Quantenmechanik, in der wir neun mögliche Messungen auf einem System bestehend aus zwei Qubits machen können. Die erlaubten Messungen sind alle von der Form $A_1 \otimes A_2$, wobei A eine beliebige Paulimatrix $\{X, Y, Z\}$ sein kann. In jeder Zeile und jeder Spalte kommutieren die Observablen paarweise und können also gemeinsam gemessen werden.

a) Zeigen Sie, dass es unmöglich ist, eine nichtkontextuelle Belegung λ von verborgenen Variablen zu finden, die allen Observablen im Mermin-Peres Quadrat Werte zuweist und konsistent mit der Quantenmechanik ist.

   Hinweis: Nehmen Sie an, eine solche Belegung existierteund verwenden Sie die Antikommutationsrelationen der Paulimatrizen um einen Widerspruch zu finden.

b) Verwenden Sie diese Tatsache um nichtkontextuelle HVMs für die Quantenmechanik auszuschließen.

c) Denken und diskutieren Sie: Hängt die Kontextualität der Quantenmechanik davon ab, welche Quantenzustände wir im Labor implementieren können, oder ist es schon eine Eigenschaft der Messungen? Ist der maximal gemischte Zustand kontextuell?