

Übungsblatt 13

Abgabe: 1.2.2018

K. Bolotin, J. Eisert

39. Fermis goldene Regel [2]

In dieser Aufgabe wollen wir die berühmte *goldene Regel von Fermi* für Übergangswahrscheinlichkeit im kontinuierlichen Spektrum herleiten. Dazu betrachten wir eine zeitunabhängige Störung V . Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen einem Anfangszustand $|i\rangle$ und einem Endzustand $|f\rangle$ in Abhängigkeit der Energien der beiden Zustände bis zur zweiten Ordnung.

40. Landau Niveaus [1+2+1+1+3+2 = 10]

In dieser Aufgabe berechnen wir den Effekt eines homogenen Magnetfeldes auf ein geladenes Teilchen. Dieses Problem wird im allgemeinen durch den Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2\mu} [\mathbf{P} - q\mathbf{A}]^2 = \frac{\mu}{2} \mathbf{V}^2, \quad (1)$$

beschrieben, wobei $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$ gegeben ist.

a) Berechnen Sie $\mathbf{V} = \frac{1}{\mu} [\mathbf{P} - q\mathbf{A}]$ für den Fall eines homogenen Magnetfeldes in

z-Richtung $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$.

b) Zeigen Sie, dass $[V_x, V_y] = -\frac{i\hbar}{\mu}\omega_c$, sowie $[V_y, V_z] = [V_x, V_z] = 0$, wobei $\omega_c = -\frac{qB}{\mu}$ die Zyklotronfrequenz ist.

c) Warum ist es nun sinnvoll den Hamiltonian in $H = H_\perp + H_\parallel$, wobei $H_\perp = \frac{\mu}{2} (V_x^2 + V_y^2)$ und $H_\parallel = V_z^2$ zu zerlegen?

Diese Erkenntnis wollen wir nun verwenden, um das Spektrum von H zu berechnen

d) Berechnen Sie dazu zunächst das Spektrum von H_\parallel .

e) Verwenden Sie die Kommutationsrelationen von V_x und V_y um H_\perp als harmonischen Oszillator zu schreiben. Berechnen Sie daraus das Spektrum von H_\perp .

f) Geben Sie nun das Spektrum von H an. Was bedeutet das Ergebnis für die möglichen Energien eines geladenen Teilchens im magnetischen Feld?

41. Dipolkopplung eines Zweiniveausystems an ein elektrisches Feld in der Rotating Wave Approximation [2 + 3 + 1 = 6]

In dieser Aufgabe wollen wir ein Atom in einem externen elektrischen Feld betrachten. In dieser Situation modellieren wir das Atom als Zweiniveausystem mit Energieabstand ϵ , das mit einem Puls einer ebenen Welle der Frequenz ω Dipol-wechselwirkt. In dieser Näherung können wir den zeitabhängigen Hamiltonian des Atoms schreiben als

$$H = H_0 + V(t) = \frac{\epsilon}{2}\sigma_z + f(t)\cos(\omega t)\sigma_x. \quad (2)$$

Mithilfe der einhüllenden $f(t)$ können wir die Pulsform des elektrischen Feldes anpassen.

Ziel ist es, die Übergangswahrscheinlichkeit des Spin- $\frac{1}{2}$ vom Grundzustand in den angeregten Zustand in Abhängigkeit des Pulses zu bestimmen. Dazu vereinfachen wir den Hamiltonian zunächst mit der sogenannten *rotating wave approximation* im Wechselwirkungsbild.

a) Drücken Sie den Term $V(t)$ im Wechselwirkungsbild unter $H_0 = \frac{\epsilon}{2}\sigma_z$ aus.

Hinweis: Wie immer hilft die Darstellung $\exp(iAt) = \cos(t)\mathbb{1} + i\sin(t)A$ für Operatoren, die $A^2 = \mathbb{1}$ erfüllen.

In der Lösung treten nun Terme der Form $\exp(i(\epsilon + \omega)t)$, sowie $\exp(i(\epsilon - \omega)t)$ auf. In der Dipolapproximation oben verlangen wir, dass das elektromagnetische Feld nahe der Resonanz $\omega \approx \epsilon$ mit dem Energieabstand des Spin- $\frac{1}{2}$ schwingt. Also haben wir $\delta := \omega - \epsilon \ll \omega + \epsilon$. Dies erlaubt uns die *rotating wave approximation* zu machen, in der wir die Terme hoher Frequenz vernachlässigen, da sie sich schnell zu null mitteln. Wir wählen nun einen gaussförmigen Puls $f(t) = \Delta e^{-(t/\tau)^2}$ mit Amplitude Δ und Breite τ .

b) Geben Sie unter Verwendung von zeitabhängiger Störungstheorie die Übergangswahrscheinlichkeit vom Grundzustand in den angeregten Zustand in der Rotating Wave Approximation nach Anwendung des Pulses an.

Hinweis: Die Übergangswahrscheinlichkeit vom Grundzustand $|0\rangle$ in $|1\rangle$ ist in zweiter Ordnung gegeben durch

$$P_{01}(t) = \left| \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{ies/\hbar} \langle 1|V(s)|0\rangle \right|^2 \quad (3)$$

c) Skizzieren Sie die Anregungswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Pulsbreite τ und analysieren Sie die interessanten Fälle.

42. Quantenteleportation [2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9]

Im Folgenden wollen wir ein Protokoll zur sogenannten Teleportieren von Quantenzuständen kennenlernen. Genauer: Es soll ein beliebiger Quantenzustand unter Verwendung eines zusätzlichen verschränkten Zustands und durch Übermittlung klassischer Information von Alice zu Bob übertragen werden. Dabei können Alice (A) und Bob (B) beliebig weit voneinander entfernt sein.

Alice hat einen beliebigen reinen Zustand, den wir als

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A \quad (4)$$

parametrisieren, wobei $|0\rangle$ und $|1\rangle$ die Eigenvektoren von σ_z bezeichnen. Außerdem teilen sich Alice und Bob den Zustand

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{A'}|0\rangle_B + |1\rangle_{A'}|1\rangle_B) \quad (5)$$

und können über das Internet miteinander kommunizieren und sich insbesondere über Messwerte austauschen.

a) Alice wendet auf A und A' , also auf $|\psi\rangle$ und ihren Teil von $|\Phi\rangle$ eine unitäre Matrix $C_{AA'}^x$ (controlled-NOT gate) an, wobei

$$C_{AA'}^x := |0\rangle\langle 0|_A \otimes \mathbb{1}_{A'} + |1\rangle\langle 1|_A \otimes \sigma_{A'}^x. \quad (6)$$

Berechnen Sie den Zustandsvektor $|\Psi\rangle_{AA'B}$ des Gesamtsystems nach dieser Operation.

b) Alice führt nun eine σ^x -Messung auf A und ein σ^z -Messung auf A' durch. Welche Messergebnisse treten mit welchen Wahrscheinlichkeiten auf? Was sind die dadurch bedingten Zustände auf B ?

Hinweis: Allgemein gilt für einen bipartiten Zustand $|\alpha\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}|i\rangle \otimes |j\rangle$ das Folgende: Wird der erste Teil des Zustands auf $|\phi\rangle$ projiziert, so befindet sich das zweite System anschließend im Zustand zu $\sum_{i,j} a_{ij}\langle\phi|i\rangle |j\rangle$ proportionalen Zustand.

- c) Bevor Bob die Messergebnisse kennt, befindet sich sein System aus seiner Sicht in einem gemischten Zustand ρ . Berechnen Sie diesen Zustand. Kann Bob durch eine geschickte Messung von ρ Informationen über $|\psi\rangle$ erhalten?
- d) Alice schickt nun die Information, welche Messausgänge sie erhalten hat, auf klassischem Weg zu Bob. Dieser wendet, je nach Messergebnis von Alice, eine der folgenden Operationen an:

$$\begin{aligned}
 \sigma^x \rightarrow +1 \quad \text{und} \quad \sigma^z \rightarrow +1 & : \quad \mathbb{1} \\
 \sigma^x \rightarrow +1 \quad \text{und} \quad \sigma^z \rightarrow -1 & : \quad \sigma^x \\
 \sigma^x \rightarrow -1 \quad \text{und} \quad \sigma^z \rightarrow +1 & : \quad \sigma^z \\
 \sigma^x \rightarrow -1 \quad \text{und} \quad \sigma^z \rightarrow -1 & : \quad \sigma^z \sigma^x
 \end{aligned} \tag{7}$$

Berechnen Sie für alle vier Fälle den resultierenden Zustand in Bobs System und vergleichen Sie ihn mit $|\psi\rangle$.

- e) Lassen sich mit diesem Protokoll tatsächlich experimentell Quantenzustände teleportieren?