

**Übungsblatt 12**

**Abgabe: 25.01.2016**

K. Bolotin, J. Eisert

**36. Wechselwirkungsbild und zeitabhängige Störungstheorie** [1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 12]

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator befinde sich für  $t < 0$  in seinem Grundzustand  $|0\rangle$ . Für  $t \geq 0$  wird eine zeitabhängige, bezüglich des Orts konstante Kraft in  $x$ -Richtung angelegt:

$$F(x, t) = F_0 e^{-t/\tau} \tag{1}$$

In dieser Aufgabe soll die Übergangswahrscheinlichkeit zum ersten angeregten Zustand mittels Störungstheorie approximiert werden.

a) Wie lautet der vollständige Hamiltonoperator in Ortsdarstellung?

Es ist hilfreich, im Dirac-Bild zu arbeiten. Wir können den Zustand im Dirac-Bild  $|\psi(t)\rangle_I$  zur Zeit  $t \geq 0$  nach den Energie-Eigenzuständen des *ungestörten* Problems (im Schrödinger-Bild) entwickeln:

$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) |n\rangle \tag{2}$$

b) Zeige, dass die Koeffizienten  $c_n(t)$  die Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} V_{n,m}(t) e^{i\omega_{n,m}t} c_m(t) \tag{3}$$

mit  $\omega(n - m) = \omega_{n,m} := (E_n - E_m)/\hbar$  und  $V_{n,m}(t) := \langle n|V(t)|m\rangle$  erfüllen, wobei  $H(t) = H_0 + V(t)$ .

c) Berechne  $V_{n,m}$  explizit und setze das Ergebnis in Gl. (3) ein, um

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_n(t) = -F_0 e^{-t/\tau} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left( \sqrt{n+1} e^{-i\omega t} c_{n+1}(t) + \sqrt{n} e^{i\omega t} c_{n-1}(t) \right) \tag{4}$$

zu erhalten.

Gl. (3) lässt sich nun formal lösen, indem beide Seiten integriert werden und die gesamte rechte Seite iterativ für den Ausdruck  $c_m$  eingesetzt wird. Mit der Anfangsbedingung erhält man die *Dyson-Reihe*

$$\begin{aligned} c_n(t) &= c_n(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \sum_{m=0}^{\infty} dt' V_{n,m}(t') e^{i\omega_{n,m}t'} c_m(0) + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \dots + \dots \\ &=: c_n^{(0)}(t) + c_n^{(1)}(t) + c_n^{(2)}(t) + \dots \end{aligned} \tag{5}$$

Zeitabhängige Störungstheorie  $k$ -ter Ordnung bedeutet nun, diese Reihe nach dem Glied  $c_n^{(k)}$  abubrechen.

d) Entwickle  $|\psi(t)\rangle_I$  in *erster* Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie.

e) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System zur Zeit  $t$  in erster Ordnung Störungsrechnung im ersten angeregten Zustand  $|1\rangle$  befindet.

- f) Zeige, dass diese Wahrscheinlichkeit für große  $t$  faktisch zeitunabhängig wird. Ist dies zu erwarten?
- g) Existieren Übergangswahrscheinlichkeiten größer Null für höhere angeregte Zustände?

37. **Kopplung von Drehimpulsen II** [8 + 3 = 11]

Wir betrachten einen Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{J} := \mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}$ , der sich aus den Drehimpulsen  $L_i^{(1)} := L_i \otimes \mathbb{1}$  und  $L_i^{(2)} := \mathbb{1} \otimes L_i$  zusammensetzt. Wir wählen natürliche Einheiten ( $\hbar = 1$ ). Aus Aufgabe 31 wissen wir, dass die folgenden Eigenwertgleichungen erfüllt sind:

$$(\mathbf{L}^{(k)})^2 |l^{(k)}, m^{(k)}\rangle = l^{(k)}(l^{(k)} + 1) |l^{(k)}, m^{(k)}\rangle \quad (6)$$

$$L_3^{(k)} |l^{(k)}, m^{(k)}\rangle = m^{(k)} |l^{(k)}, m^{(k)}\rangle \quad (7)$$

$$\mathbf{J}^2 |j, m_J\rangle = j(j + 1) |j, m_J\rangle \quad (8)$$

$$J_3 |j, m_J\rangle = m_J |j, m_J\rangle \quad (9)$$

Außerdem wurde in Aufgabe 32 gezeigt, dass

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L}^{(1)})^2 + (\mathbf{L}^{(2)})^2 + 2L_3^{(1)}L_3^{(2)} + L_+^{(1)}L_-^{(2)} + L_-^{(1)}L_+^{(2)} \quad (10)$$

gilt. Im Folgenden Betrachten wir den Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{J}$  eines Spin-1 und eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens.

- a) Konstruieren Sie eine Darstellung aller Eigenzustände  $|3/2, m_J\rangle$  und  $|1/2, m_J\rangle$  von  $\mathbf{J}^2$  und  $J_z$  bzgl. der Eigenzustände von  $(\mathbf{L}^{(k)})^2$  und  $L_3^{(k)}$ . *Hinweis:* Als erster Schritt ist der Ansatz  $|3/2, 3/2\rangle = |1, 1\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle$  bzw.  $|1/2, 1/2\rangle = \sqrt{2/3} |1, 1\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle - \sqrt{1/3} |1, 0\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle$  hilfreich (warum?).
- b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen des Operators  $L_z^{(1)} + 2L_z^{(2)}$  für  $l^{(1)} = 1$  und  $l^{(2)} = 1/2$  bzgl. der zwei im letzten Aufgabenteil vorkommenden Basen.