Freie Universität Berlin

**Übungen zur Quantenmechanik**

Wintersemester 2017/18

## Übungsblatt 11 (Welcome-back Blatt!)
## Drehimplus, Rotationssymmetrie, und zeitunabhängige Störungstheorie

**Abgabe: 18.1.2018** K. Bolotin, J. Eisert

---

31. **Die Schrödinger-Gleichung für radialsymmetrische Potentiale**

[$3 + 1 + 1 + 2 + 2 = 9$ Punkte]

Wir betrachten die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für radialsymmetrische Potentiale. Die radiale Symmetrie ermöglicht einen Prouktansatz von Radial- und Winkelanteil der Wellenfunktion. Wir befassen uns zunächst mit dem Winkelanteil und den Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators.

Dafür bezeichnen wir mit $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+, r^2\mathrm{d}r)$ die Menge von Funktionen $R : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, die auf folgende Weise quadratintegrabel sind:

$$\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{d}r\, r^2\, |R(r)|^2 < \infty. \tag{1}$$

Außerdem definieren wir die Menge $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^2, \mathrm{d}\Omega)$ der quadratintegrable Funktionen auf der Einheitskugeloberfläche in $\mathbb{R}^3$ als periodische Funktionen $\Psi : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{C}$ für die

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)\, |\Psi(\phi, \theta)|^2 < \infty \tag{2}$$

gilt.

a) Benutzen Sie die Darstellung des Gradienten in Kugelkoordinaten (muss nicht hergeleitet werden) um die Darstellung der kartesischen Komponenten $L_j$ sowie von $L^2$ in Kugelkoordinaten zu berechnen.

b) Folgern Sie aus dem Ergebnis der letzten Aufgabe, dass gemeinsame Eigenzustände von $L^2$ und $L_3$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$ geschrieben werden können als $\psi_{\lambda,m}(r, \phi, \theta) = R(r)\Psi_{\lambda,m}(\phi, \theta)$ wobei $R \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+, r^2\mathrm{d}r)$ *beliebig* ist und $\Psi_{\lambda,m} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{S}^2, \mathrm{d}\Omega)$ eine Eigenfunktion von $L^2$ zu Eigenwert $\lambda$ und von $L_3$ zu Eigenwert $m$ ist.
*Bemerkung:* Dies bedeutet insbesondere, dass jeder Eigenwert der Operatoren $L^2$ und $L_j$ auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$ "unendlich-fach" entartet ist.

Wir betrachten nun einen Hamiltonoperator der Form

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x), \tag{3}$$

auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Wir nehmen an, dass das Potential $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ radialsymmetrisch ist, also nur von $\|x\|$ abhängt und somit als $V(x) = \tilde{V}(\|x\|)$ mit $\tilde{V} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. Des Weiteren sei $V$ beliebig oft differenzierbar.

c) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator $H$ sowohl mit $L^2$ als auch mit den Komponenten $L_j$ vertauscht.

d) Zeigen Sie, dass der Operator $P^2$ in Ortsdarstellung als

$$P^2 = P_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \tag{4}$$

mit $P_r = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)$ geschrieben werden kann.

e) Sei $\psi_{\lambda,m}(r,\phi,\theta) = R(r)\Psi_{\lambda,m}(\phi,\theta)$ eine Eigenfunktion von $L^2$ und $L_3$ mit Eigenwerten $\lambda$ bzw. $m$. Da $[L^2, H] = 0$ und $[L_3, H] = 0$ ist $\Psi_{\lambda,m}$ Eigenfunktion von $H$. Geben Sie die Bedingung an $R$ an, sodass $\psi_{\lambda,m}$ ebenfalls Eigenfunktion von $H$ ist.

32. **Kopplung von Drehimpulsen** [1 + 1 + 3 = 5 Punkte]
Wir betrachten nun die Addition zweier Dehimpulse. Der Gesamtdrehimpuls lässt sich als Operator der Form

$$J_i := L_i \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes L_i, \quad i \in \{1,2,3\} \tag{5}$$

schreiben, wobei $L_i$ Komponenten des gewöhnlichen Drehimpulsoperators sind. Wie in der Vorlesung bezeichnen wir die Eigenzustände von $L^2$ und $L_3$ mit Eigenwert $l(l+1)$ bzw. $m$ mit $|l,m\rangle$. Offensichtlich ist $\hbar = 1$.

a) Zeigen Sie, dass $J$ ein Drehimpulsoperator ist in dem Sinne, dass er die entsprechenden Kommutationsrelationen erfüllt.

b) Ist der Produktzustand $|l,m\rangle\,|l',m'\rangle$ ein Eigenzustand von $J_3$ ? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls den zugehörigen Eigenwert an.

c) Ist der Produktzustand $|l,m\rangle\,|l',m'\rangle$ ein Eigenzustand von $J^2$ ? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls den zugehörigen Eigenwert an.
*Hinweis:* Schreiben Sie hierzu $J^2$ als einen Ausdruck in dem lediglich die Operatoren $\mathbb{1}$, $L^2$, $L_3$, $L_+$ und $L_-$ vorkommen. Diskutieren Sie die Fälle mit $m \in \{\pm l\}$ und $m' \in \{\pm l'\}$ gesondert.

33. **Gestörter harmonischen Oszillator** [1 + 3 + 4 = 8 Punkte])

Wir betrachten den Hamiltonoperator

$$H_\lambda := \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2 + \lambda X^4 \tag{6}$$

eines gestörten quantenmechanischen harmonischen Oszillators.

a) Schreibe den Hamiltonoperator in Besetzungszahldarstellung, d.h. finde Konstanten $\alpha$ und $\beta$, sodass

$$H_\lambda = \alpha\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \lambda\beta(a + a^\dagger)^4 \tag{7}$$

und gib an, wie $a$ und $a^\dagger$ auf die Eigenzustände von $H_0$ wirken.

b) Berechne alle Eigenenergien von $H_\lambda$ in erster Ordung Störungstheorie in $\lambda$.

c) Wir bezeichnen mit $|\psi_2(\lambda)\rangle$ den zweiten angeregten Zustand von $H_\lambda$. Berechne dessen Überlapp $\left\langle 0^{(0)} \middle| \psi_2(\lambda)\right\rangle$ mit dem Grundzustand $\left|0^{(0)}\right\rangle$ des ungestörten harmonischen Oszillators in erster Ordung Strörungstheorie in $\lambda$.

34. **Fazit** [1 Punkt]
Fassen Sie die Ihrer Meinung nach wichtigsten Ergebnisse und Erkenntnisse des Übungszettels knapp zusammen.