Freie Universität Berlin

Übungen zur Quantenmechanik

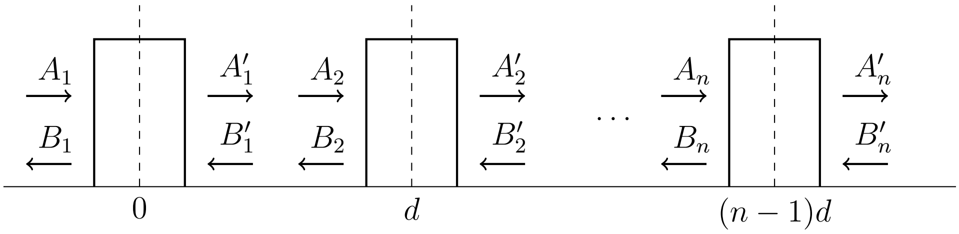
Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 9

Abgabe: 21.12.2017 K. Bolotin, J. Eisert

26. **Viele Potentialbarrieren** $[1+1+1+2+1+1+2+1=10]$ Punkte

In der vorherigen Aufgabe haben wir die Situation betrachtet, in der Teilchen auf eine Potentialbarriere treffen. Wir wollen nun die Situation von n Potentialbarrieren betrachteten, die in festem Abstand d voneinander aufgereiht sind:



Wie in der vorherigen Aufgabe suchen wir formale Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung in der Form ebener Wellen mit Koeffizienten A_j und B_j. Wir wissen bereits aus der vorherigen Aufgabe, dass die Koeffizienten unmittelbar vor einer Barriere (ungestrichen) mit den Koeffizienten unmittelbar nach der Barriere (gestrichen) über eine *Transfermatrix* M zusammenhängen. Wir suchen nun einen Zusammenhang zwischen den A_j und B_j für beliebig viele Potentialbarrieren.

a) Erklären Sie, warum die Koeffizienten A'_j, B'_j und A_{j+1}, B_{j+1} über die Relation

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}kd) & 0 \\ 0 & \exp(-\mathrm{i}kd) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_j \\ B'_j \end{pmatrix} =: Q \begin{pmatrix} A'_j \\ B'_j \end{pmatrix}.$$

verknüpft sind.

Wir setzen nun $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ und definieren $P = QM$.

b) Drücken Sie A_{n+1} und B_{n+1} durch A_1 und B_1 mit Hilfe von P aus.

c) Zeige Sie, dass $\det(P) = 1$. Was bedeutet dies für die Eigenwerte λ_+ und λ_- von P?
Hinweis: Wir wissen bereits, dass $\det(M) = 1$.

d) Berechnen Sie λ_+ und λ_- und stellen Sie diese durch α, β, k, d dar. Welche Fälle können auftreten?
Drücken Sie in allen Fällen $\lambda_\pm$ in der Form $\exp(r_\pm d)$ aus. Die Konstanten $r_\pm$ brauchen nicht explizit berechnet werden, aber es soll angegeben werden, wie sie in den verschiedenen Fällen miteinander verknüpft sind.
Hinweis: Das charakteristische Polynom einer (2×2)*-Matrix* P *hat die Form* $\lambda^2 - \lambda \mathrm{Tr}(P) + \det(P) = 0$.

e) Es seien ϕ^+ und ϕ^- die Eigenvektoren von P. Zeigen Sie, dass A_{n+1} und B_{n+1} auf folgende Weise ausgedrückt werden können:

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = C\lambda_+^n \phi^+ + D\lambda_-^n \phi^-, \tag{1}$$

wobei $C, D \in \mathbb{C}$ Konstanten sind, d. h. nicht von n abhängen.

f) Nehmen Sie nun an, dass $B_{n+1} = 0$ gilt, und zeigen Sie, dass A_{n+1}/A_1 als

$$\frac{A_{n+1}}{A_1} = \lambda_-^n \frac{1-\gamma}{1-(\lambda_-/\lambda_+)^n\gamma}, \quad \gamma = \frac{\phi_1^+\phi_2^-}{\phi_1^-\phi_2^+} \tag{2}$$

geschrieben werden kann.

g) Diskutieren Sie, wie der Transmissionskoeffizient $T_n := |A_{n+1}/A_1|^2$ von n abhängt. Gibt es Fälle, für die man beliebig große n finden kann, sodass $T_n \simeq 1$ ist?

h) Können wir eine analoge Rechnung auch für periodische Potentiale machen, die nicht in Rechteckform sind? (Mit kurzer Begründung).

27. **De Broglie Wellenlänge** $(1+2+1+1=5$ Punkte)

a) Wir studieren ein Elektron, das durch ein Potential V beschleunigt wurde. Berechnen Sie die De Broglie Wellenlänge in Abhängigkeit des Potentials.

b) Für hohe Geschwindigkeiten müssen wir eine relativistische Korrektur betrachten. Berechnen Sie nun die De Broglie Wellenlänge im relativistischen Regime. Verwenden Sie dazu die relativistische Energie

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} \tag{3}$$

und beachten Sie, dass das Elektron nun eine Ruheenergie m_0c^2 hat.

c) Wie gross muss das Potential V sein, sodass der Unterscheid zwischen der klassischen und der relativistischen De Broigle Wellenlänge mehr als 10% beträgt.

d) Es soll ein Teilchenbeschleuniger gebaut werden, welcher Strukturen mit Grössen von 1 Fermi ($10^{-15}m$) proben kann. Wie gross muss die Energie eines Elektrons in einem solchen Beschleuniger sein? Und für ein Proton?

28. **Das klassische Wasserstoffatom** $(1+1+1+2=5$ Punkte)

Mit Maxwells Gleichungen, kann gezeigt werden, dass eine beschleunigte Ladung Energie abstrahlt. Die Leistung dieser Strahlung ist durch die Larmor Formel gegeben:

$$P = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0c^3} \tag{4}$$

wobei q die Ladung und a die Beschleunigung sind. Wir wollen die Konsequenzen daraus auf das klassische Atommodell abschätzen.

Nehmen Sie an, dass ein Elektron im Abstand von einem Bohrschen Radius um ein Proton kreist.

a) Berechnen Sie die potentielle Energie des Elektrons im Potential des Protons.

b) Berechnen Sie die Beschleunigung, die das Elektron aufgrund seiner Kreisbewegung erfährt.

c) Wie hoch ist die Leistung, der durch diese Beschleunigung verursachten Strahlung?

d) Schätzen Sie nun die Zeit ab, die das Elektron braucht, um in den Atomkern zu stürzen.