Freie Universität Berlin

Übungen zur Quantenmechanik

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 7

Abgabe: 14.12.2017 K. Bolotin, J. Eisert

24. **Gemischte Zustände** ($2 + 2 + 2 + 2 = 8$ Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir uns etwas konkreter mit gemischten Zuständen von Quantensystemen beschäftigen. Im Gegensatz zu reinen Zuständen, d.h. Zustandsvektoren im Hilbertraum, erlauben Dichtematritzen die Berücksichtigung von fehlendem Wissen bei der Beschreibung eines Zustandes. Genauer bedeutet dies, dass wir auch Situationen beschreiben können in denen wir nicht mit Sicherheit wissen in welchem Zustand sich ein System gerade befindet.

Dazu betrachten wir im Folgenden einen Versuchsaufbau, bei dem ein Apparat den Zustand eines Quantensystems mit drei Leveln präparieren soll. Der Hilbertraum des Systems ist somit $\mathbb{C}^3$. Im Anschluss an diese Präparation führen wir eine Messung der Observablen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

durch.

a) Der Präparationsappart habe einen Drehknopf, der es erlaubt einen der drei Zustände

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder } |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{2}$$

zu präparieren. Berechnen Sie jeweils den Erwartungswert der Observable A.

b) Die Maschine habe nun einen Wackelkontakt, so dass in der Stellung i der gewünschte Zustand $|\psi_i\rangle$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit p, die übrigen beiden Zustände jedoch mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{2}$ präpariert werden. Verwenden Sie das Ergebnis aus a) um den Ausdruck für den Erwartungswert der Observablen A fuer $i = 1$ zu bestimmen.

c) Beschreiben Sie die in b) beschriebene experimentellen Situation fuer $i = 1$ durch einen Dichteoperator und zeigen Sie, dass dies auf denselben Erwartungswert führt.

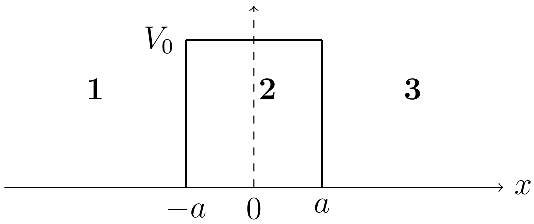
d) Betrachten sie nun die kohaerente Superposition der drei Zustände

$$\sqrt{p}\,|\psi_1\rangle + \sqrt{\frac{1-p}{2}}\,|\psi_2\rangle + \sqrt{\frac{1-p}{2}}\,|\psi_3\rangle$$

Welche zusaetzlichen Terme tragen in diesem Zustand im Unterschied zum gemischten Zustand von Aufgabe c) zum Erwartungswert bei?

25. **Eine Potentialbarriere** $[1+2+2+2+3+1+1+2+1+1=16]$ Punkte
In dieser Aufgabe betrachten wir die Streuung von Teilchen an einer Potentialbarriere, die durch das folgende Potential gegeben ist:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } |x| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$



a) Welcher physikalischen Situation könnte eine Potentialbarriere als Modell dienen?

Wir wollen zunächst formale Lösungen für die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in den drei Bereichen $1, 2, 3$ einzeln bestimmen. Dazu machen wir für jedes Gebiet $j \in \{1, 2, 3\}$ den Ansatz

$$\psi_j(x) = A_j \exp(\mathrm{i}k_j x) + B_j \exp(-\mathrm{i}k_j x) \tag{3}$$

mit $A_j, B_j, k_j \in \mathbb{C}$. Die Wellenzahl k_1 bestimmt die Energie E der Teilchen und wir nehmen an, dass $E < V_0$. Dies bedeutet, dass ein klassisches Teilchen mit dieser Energie die Barriere nicht überwinden kann.

b) Bestimmen Sie k_j in Abhängigkeit von E in den drei Regionen.

Wir wollen nun aus den formalen Lösungen für die einzelnen Bereiche eine formale Lösung Ψ auf ganz $\mathbb{R}$ konstruieren.

c) Argumentieren Sie, dass Ψ und die Ableitung Ψ' stetig sein müssen.

d) Benutzen Sie die Stetigkeit von Ψ und Ψ', um ein lineares Gleichungssystem für die Konstanten A_j und B_j zu finden, und schreiben Sie es in der Form

$$M_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, M_3 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = M_4 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit (2×2)-Matrizen M_1, M_2, M_3 und M_4.

e) Zeigen Sie, dass die Matrizen M_2 und M_3 für $0 \neq E \neq V_0$ invertierbar sind und benutzen Sie dies, um eine Gleichung der Form

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

mit einer komplexen 2×2-Matrix $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ aufzustellen. Berechnen sie α und β explizit und bestimmen sie $\det(M)$.
Hinweis: Bei der expliziten Berechnung von M ist es hilfreich, zuerst das Produkt $M_4 M_2^{-1}$ auszurechnen.

f) Wir wollen nun den Fall betrachten, bei dem von rechts keine Teilchen auf die Barriere treffen. Argumentieren Sie, dass deshalb $B_3 = 0$ gelten muss.

g) Zeigen Sie, dass der *Transmissionskoeffizient* $T := |A_3/A_1|^2$ durch

$$T = \frac{1}{\cosh(2\kappa a)^2 + \left(\frac{\kappa^2 - k_1^2}{2k_1\kappa}\right)^2 \sinh(2\kappa a)^2} \tag{6}$$

gegeben ist.

h) Wir wollen nun das Verhalten von T als Funktion von a für festes E und festes V_0 diskutieren. Wie lässt sich Gl. (6) für große und kleine a approximieren? Kommentieren Sie die physikalischen Implikationen.

i) Bestimmen Sie nun den *Reflexionskoeffizienten* $R := |B_1/A_1|^2$ und berechnen Sie $R + T$. Diskutieren Sie anschließend das Ergebnis.

Zum Abschluss betrachten wir noch einmal den allgemeinen Fall bei dem auch $B_3 \neq 0$ gelten kann.

j) An Gleichung (5) sehen wir, dass für eine *rechteckige* Potentialbarriere die Koeffizienten A_1 und B_1 von A_3 und B_3 linear abhängen. Argumentieren Sie, warum dies auch für *beliebige* (d. h. nicht rechteckige) Potentialbarrieren gilt.