Freie Universität Berlin
Übungen zur Quantenmechanik
Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 7

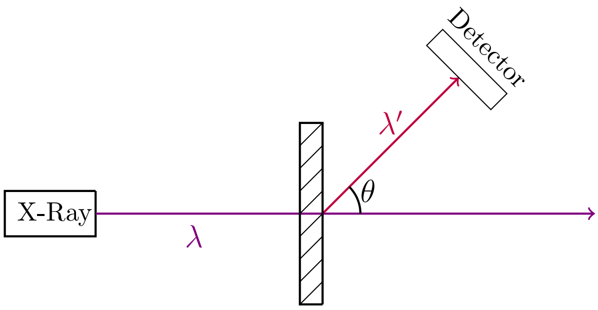
Abgabe: 7.12.2017 K. Bolotin, J. Eisert

19. **Photo- und Comptoneffekt** $(2+2+1+2+3+2 = 12$ Punkte$)$
In der Vorlesung wurde der Photoeffekt und der Comptoneffekt als Phänomene besprochen, die grundlegend für unser Verständnis von Licht als Teilchen sind. In dieser Aufgabe wollen wir uns noch einmal damit beschäftigen.

Aus dem Photoeffekt haben wir geschlussfolgert, dass die Energie von Licht in sogenannten 'Photonen' mit Energie $h\nu$ 'quantisiert' ist.

a) Wir lassen UV-Licht mit Wellenlänge $\lambda = 220$ nm auf eine Nickelelektrode (mit Austrittsarbeit 4.84 eV) scheinen. Schätzen Sie die maximale Geschwindigkeit von den durch die Bestrahlung aus der Elektrode ausgelösten Photoelektronen.

Der Comptoneffekt verrät uns darüber hinaus, dass sich Licht, tatsächlich auch wie Teilchen mit Impuls $p = \hbar k$ verhält, das mit Elektronen stoßen kann wie ganz alltägliche Billardkugeln. Wir betrachten nun den Aufbau des Experiments aus der Vorlesung.

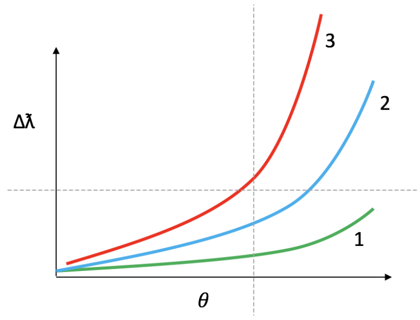


b) Röntgenstrahlen mit Photonenenergie $E_{\mathrm{ph}} = 56$ keV [1] werden an einer Kohlenstoffprobe gestreut. Wir beobachten die gestreuten Strahlen im Winkel von 85° zum einfallenden Strahl.

Was ist der Comptonshift der gestreuten Strahlen und die relative Veränderung der Energie der Photonen?

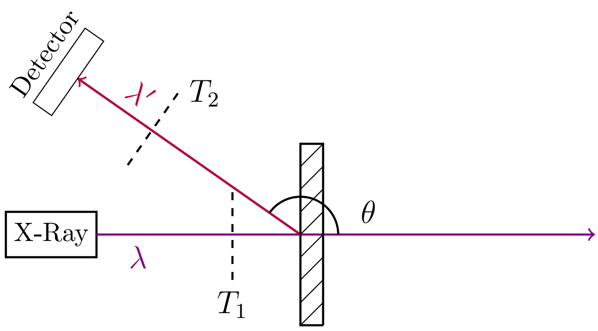
Wir betrachten nun die Streuung an unterschiedlichen stationären Teilchen (die nicht unbedingt Elektronen sein müssen) mit Ruhemassen m_1, m_2, m_3. Die Winkelabhängigkeit des Comptonshifts $\Delta\lambda$ ist im Folgenden geplottet.

[1] Ein Elektronenvolt (eV) ist die Energie, die ein Elektron durch die Beschleunigung über ein Potential von 1 Volt erhält.

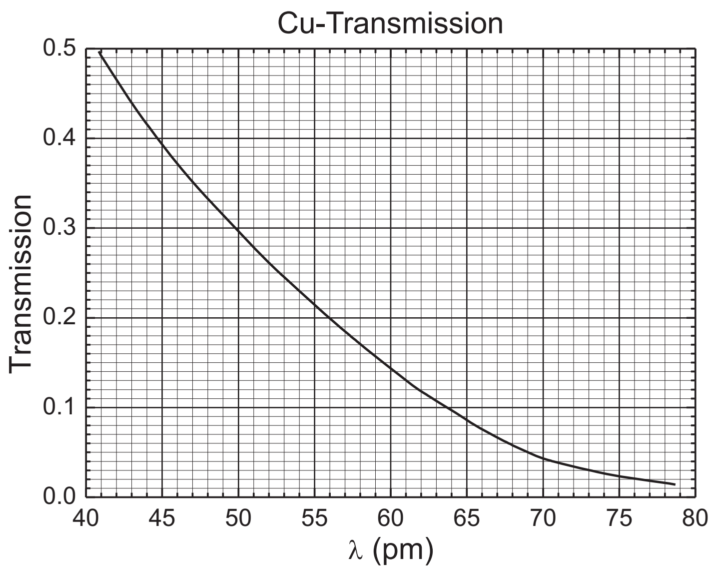


c) Ordnen Sie die Teilchen $1, 2, 3$ gemäßihrer Massen m_1, m_2, m_3 und erklären Sie Ihre Überlegung.

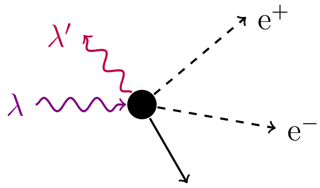
In der Vorlesung haben wir experimentell den Comptoneffekt gemessen. Dazu betrachteten wir die Streuung von Röntgenstrahlen an einem Graphitsubstrat. Die gestreute Strahlung wurde im Winkel von 145° bezüglich der einfallenden Strahlung beobachtet. Wir haben dann eine Kupferfolie zwischen Röntgenquelle und Substrat, sowie zwischen Substrat und Detektor gestellt und die Transmission gemessen.



c) Die Transmission an der ersten und zweiten Position der Kupferfolie war jeweils $T_1 = 0.182$ und $T_2 = 0.164$. Nehmen wir an, dass die Compton-gestreute Strahlung sowohl Strahlung der ursprünglichen Wellenlänge λ sowie der rotverschobenen Strahlung im Verhältnis $2 : 1$ enthält. Schätzen Sie die Rotverschiebung $\Delta\lambda$ unter Verwendung der folgenden Daten zur Transimissivität von Kupfer im Röntgenbereich. Ist das Ergebnis konsistent mit unserer Theorie der Comptonstreuung?



Wenn die Energie der einfallenden Photonen groß ist, kann es passieren, dass während des Prozesses der Comtponstreuung ein neues Elektron-Positron-Paar mit Ruheenergie $2m_e c^2$ entsteht.



Dieser Prozess nennt sich Paarbildung. Wir wollen dieses Phänomen nun etwas genauer untersuchen.

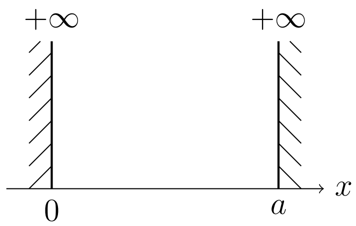
d) Ist Paarbildung für ein freies Photon mit ausreichend großer Energie im Vakuum (also ohne Stoß) möglich?

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass das Photon in dem Prozess annihiliert wird, also die gesamte Energie des Elektrons in das Elektron-Positron Paar fließt. Betrachten Sie dann Energie- und Impulserhaltung wie in der Herleitung des Comptoneffekts. Sind diese Gleichungen konsistent?

Aus dem Compton und dem Photoeffekt haben wir geschlossen, dass Licht sich auch als Teilchen mit Impuls verhält, obwohl diese Photonen keine Masse haben. Trotzdem können sie aber einen Druck auf eine Oberfläche ausüben, indem sie nämlich von ihr reflektiert werden und dabei Impuls an die Atome in der Oberfläche abgeben.

e) Schätzen Sie den Strahlungsdruck, der von einer Glübirne mit 100 W auf ein Blatt Papier mit 1 m^2 Fläche im Abstand von 1 m ausgeübt wird.

20. **Potentialtopf** $(2+2+2+2 = 8$ Punkte)
Wir betrachten ein freies Teilchen in einem unendlich tiefen Potentialtopf, also in dem Potential



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Das unendlich hohe Potential führt dazu, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für x außerhalb von $[0, a]$ verschwinden muss. Daraus ergibt sich, dass die Lösungen der Schrödingergleichung im Hilbertraum $L^2([0, a])$ mit Skalarprodukt $\langle \psi, \phi \rangle := \int_0^a \psi(x)^* \phi(x)\, \mathrm{d}x$ liegen. Zudem müssen die ersten und zweiten Ableitungen der Lösungen in $L^2([0, a])$ existieren und die Lösungen müssen die Randbedingung $\psi(0) = \psi(a) = 0$ erfüllen.

a) Finden Sie alle Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für den freien Hamiltonoperator $H = \frac{P^2}{2m}$ mit den oben genannten Eigenschaften.

b) Die Lösungen der Schrödingergleichung lassen sich durchnummerieren und entsprechend als ψ_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben. Geben Sie die zugehörigen Energien E_n an. Welche Eigenschaft der Funktion ψ_n wird durch n gezählt?

c) Vergleichen Sie die Grundzustandsenergie mit der aus dem Heisenbergschen Unschärfeprinzip abgeschätzten.

d) Verifizieren Sie, dass die normierten Lösungen ψ_n paarweise orthonormal sind, d. h. dass gilt:

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \delta_{n,m} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{1}$$

21. **Auslaufen von Wellenpaketen und Heisenbergbild** ($2+2+2+2+1=9$ Punkte)
Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in einer Dimension, beschrieben durch den Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$. Das Teilchen sei frei, der Hamiltonoperator lautet also $H = \frac{P^2}{2m}$.

a) Zeigen Sie, dass für die Operatoren $X(t)$ und $P(t)$ im Heisenbergbild

$$[X(t), P(t)] = \mathrm{i}\,\mathbb{1} \text{ und } P(t) = P(0) = P \tag{2}$$

für alle t gilt.

b) Zeigen Sie weiterhin, dass im Heisenbergbild

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{P(t)}{m} \tag{3}$$

gilt.

Hieraus folgt, dass

$$X(t) = X(0) + tP/m. \tag{4}$$

c) Zeigen Sie, dass $[X(0), X(t)] = \mathrm{i}\,t/m$ gilt.

d) Es gilt, dass $\sigma(X(0)) > 0$ für alle Zustände in $L^2(\mathbb{R})$. Benutzen Sie das Unschärfeprinzip $\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}|\langle [A, B] \rangle|$ und Gleichung (4), um eine untere Schranke für $\sigma(X(t))$ zu finden.

e) Was bedeuten das vorherige Ergebnis und Gleichung (4) für ein Teilchen, welches lokalisiert präpariert und dann frei in der Zeit entwickelt wird?

22. **Orts- und Impulsoperator** (2 Punkte)
Eine *Eigenfunktion* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ eines Operators A auf $L^2(\mathbb{R})$ erfüllt die Eigenwertgleichung $A\psi = \lambda\psi$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Der Kommutator des Ortsoperators X und des Impulsoperators P ist (mit $\hbar = 1$) durch

$$[X, P]\psi = \mathrm{i}\,\psi \tag{5}$$

gegeben (für geeignete $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, s. Aufgabe 18c). Folgere aus Gl. (5), dass weder Eigenfunktionen von X noch von P im $L^2(\mathbb{R})$ existieren.
Hinweise: Widerspruchsbeweis.

23. **Fazit** [1 Punkt]
Fassen Sie die Ihrer Meinung nach wichtigsten Ergebnisse und Erkenntnisse des Übungszettels knapp zusammen.