Freie Universität Berlin
Übungen zur Quantenmechanik
Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 6

Abgabe: 30.11.2017 K. Bolotin, J. Eisert

16. **Gestörter harmonischer Oszillator** [$2+4+3+4+4=17$ Punkte]
Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + \lambda\hat{x}. \tag{1}$$

eines gestörten quantenmechanischen harmonischen Oszillators mit Orts- und Impulsoperatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$, die auf einen dichten Unterraum des Hilbertraums der quadratintegrablen Funktionen wirken.

a) In diesem Aufgabenteil betrachten wir zunächst den Fall $\lambda = 0$. Um in diesem Fall die Eigenzustände von $\hat{H}$ zu finden, erweist es sich als nützlich, Linearkombinationen der Orts- und Impulsoperatoren als neue Operatoren einzuführen. $x^2 + p^2$ lässt sich für reelle x, p mit der dritten binomischen Formel schreiben als $(x + \mathrm{i}p)(x - \mathrm{i}p)$. Damit motivieren wir die Einführung eines Operators

$$\hat{a} \coloneqq \alpha\hat{x} + \beta\mathrm{i}\hat{p} \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(i) Bestimmen Sie die Konstanten α und β, so dass $\hat{H} = \frac{\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$ ist.
(ii) Zeigen Sie, dass für den Operator $\hat{a}$ die Kommutatorrelation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ gilt. Welche Form hat damit der Hamiltonoperator für $\lambda = 0$?
(*Hinweis:* $[x, p] = \mathrm{i}\hbar$)

b) Sei nun $\lambda \neq 0$.

(i) Stellen Sie den gestörten Hamiltonoperator als Kombination von a und $a^\dagger$ dar.

Wir definieren nun eine neue Ortskoordinate $\tilde{x} \coloneqq x + x_0$ und ein neues Potential $\tilde{U}(\tilde{x}) \coloneqq U_0(\tilde{x}) + u_0$ mit reellen Konstanten x_0 und u_0, wobei U_0 das Potential des Hamiltonoperators mit $\lambda = 0$ ist.

(ii) Schreiben Sie den Hamiltonoperator in Abhängigkeit von $\tilde{x}$. Führen Sie Auf- und Absteigeoperatoren $b^\dagger$ und b ein und bringen Sie den Hamiltonoperator in die Form eines ungestörten harmonischen Oszillators mit verschobener Energieskala (zeigen Sie also, dass $\hat{H} = k_1(b^\dagger b + k_2)$).

c) Die zeitunabhängige Schrödingergleichung $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$ ist eine Eigenwertgleichung des Hamiltonoperators. Wir definieren nun $\hat{N} := \hat{b}^\dagger\hat{b}$. Überlegen Sie warum die Operatoren $\hat{N}$ und $\hat{H}$ die gleichen Eigenzustände haben.

(i) Sei $|\xi\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{N}$ mit $\hat{N}\,|\xi\rangle = \lambda\,|\xi\rangle$. Zeigen Sie, dass $\hat{b}\,|\xi\rangle$ und $\hat{b}^\dagger\,|\xi\rangle$ ebenfalls Eigenvektoren von $\hat{N}$ sind. In welcher Beziehung stehen die Eigenwerte der Vektoren $\hat{b}\,|\xi\rangle$ und $\hat{b}^\dagger\,|\xi\rangle$ zu λ?
(ii) Zeigen Sie, dass $\hat{N} = \hat{b}^\dagger\hat{b}$ ein positiver Operator ist und zeigen Sie damit, dass $\hat{N}$ den kleinsten Eigenwert 0 hat.

d) Der Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert von $\hat{N}$ wird mit $|0\rangle$ bezeichnet.

(i) Zeigen Sie unter Verwendung der oben hergeleiteten Eigenschaften von $\hat{b}^\dagger |\xi\rangle$ dass die normierten Eigenvektoren von $\hat{N}$ durch

$$|n\rangle := \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(b^\dagger\right)^n |0\rangle \tag{3}$$

gegeben sind.

(ii) Beweisen Sie damit die folgenden Gleichungen:

$$\hat{b}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$
$$\hat{b}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$
$$\hat{N}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$$

(iii) Berechnen Sie daraus die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$.

e) Wir schreiben $\psi_n(x)$ für die Ortsraumdarstellung von $|n\rangle$. Wir wollen nun eine explizite Lösung für ψ_0 und ψ_1 finden.

(i) Schreiben Sie die Differentialgleichung $\hat{b}\psi_0(x) = 0$ unter Verwendung der Ortsraumdarstellung des Impulsoperators explizit aus und lösen Sie diese. Normieren Sie anschließend die Lösung.

(ii) Leiten Sie aus der gefundenen Lösung ψ_0 für den Grundzustand und mit Hilfe von (3) und der Ortsraumdarstellung von $b^\dagger$ die Wellenfunktion ψ_1 des ersten angeregten Zustandes her.

17. **Schwarzkörperstrahlung** [4 + 4 + 3 + 4 + 2 = 17 Punkte]

a) In der Vorlesung wurde das Spektrum eines schwarzen Körpers in Abhängigkeit der Frequenz hergeleitet:

$$I_E(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1}. \tag{4}$$

Schreiben Sie dieses Spektrum als eine Funktion der Wellenlänge λ. k

Hinweis: Dazu ist es nicht genug, einfach die Variablen zu wechseln! Nun betrachten Sie die Leistung die pro Wellenlängeneinheit emittiert wird.

b) In der Vorlesung wurde die Herleitung von Kirchhoffs Gesetz skizziert. Dazu wurden zwei Körper (mit Absorptionskoeffizienten α_1 und α_2), die thermische Strahlung austauschen, in einer rechteckigen Kavität mit Spiegeln an den Wänden betrachtet. Kirchhoffs Gesetz

$$\frac{I_1}{\alpha_1} = \frac{I_2}{\alpha_2}\,, \tag{5}$$

folgte dann aus den Bedingungen für thermisches Gleichgewicht. Leiten Sie dieses Gesetz rigoros her.

Hinweis: Vergleichen Sie dazu die Leistung, die von Körper 1 emittiert wird (I_1) mit der Leistung, die dieser Körper aus thermischer Strahlung aufnimmt. Um letztere zu finden, addieren Sie die Strahlung, die von Körper 2 emittiert und Körper 1 absorbiert wird ($\alpha_1 I_2$), die Strahlung , die von Körper 1 emittiert, von Körper 2 reflektiert und von Körper 1 wieder absorbiert wird ($I_1(1-\alpha_2)\alpha_1$), die Strahlung, die von Körper 2 emittiert, von Körper 1 reflektiert, von Körper 2 wieder reflektiert und dann von Körper 1 absorbiert wird, usw....

c) Nehmen wir an, dass der menschliche Körper als schwarzer Körper mit $2\,\mathrm{m}^2$ Oberfläche und Hauttemperatur von 33°C approximiert werden kann. Schätzen Sie die vom menschlichen Körper emittierte thermische Strahlungsleistung ab. Schätzen Sie dann (numerisch) die Wellenlänge und Frequenz bei der diese Leistung maximal wird.

d) In der Vorlesungen haben Sie die die Beziehung

$$I_E(T,\nu) = \frac{1}{4} c \cdot u(T,\nu) \tag{6}$$

zwischen der spektralen Leistung $I_E(T,\nu)$, die pro Flächeneinheit emittiert wird, und der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes $u(T,\nu)$ in einer Kavität (Box) gesehen. Leiten Sie diese her.

Hinweis: Betrachten Sie die Energie $U(T,\nu)$ des elektrischen Feldes, die in einem Zeitintervall Δt von einer Fläche ΔA senkrecht dazu abgestrahlt wird. Bilden Sie dann den Durchschnitt über die möglichen Raumelemente in einer Box. Die Energiedichte u ergibt sich dann als Energie pro Volumen.

e) Führen Sie die Summen aus

$$\overline{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} nh\nu e^{\frac{-nh\nu}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{-nh\nu}{k_B T}}}\,, \tag{7}$$

aus denen in der Vorlesung die Planck'sche Herleitung der durchschnittlichen Energie $\overline{\epsilon}$ pro Mode im thermischen Gleichgewicht berechnet wurde.