Freie Universität Berlin
Übungen zur Quantenmechanik
Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 5

Abgabe: 23.11.2017 J. Eisert

14. **Spektralkalkül** [2 + 1 + 1 + 2 + 2 + (1) + 2 Punkte]
Eine normale Matrix $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ kann als

$$A = U D U^\dagger \tag{1}$$

zerlegt werde, wobei U eine unitäre und D eine diagonale Matrix ist. Die Diagonaleinträge von D sind die Eigenwerte $(\lambda_i)_{i=1,\dots,d}$ von A. Im sogenannten *Funktionalkalkül* wird einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der folgende Operator zugeordnet:

$$f(A) \coloneqq U f(D)\, U^\dagger, \tag{2}$$

wobei $f(D)$ die Diagonalmatrix ist, die $(f(\lambda_i))_{i=1,\dots,d}$ als Diagonaleinträge hat.

a) Eine Matrix A kann man in ein Polynom $p(x) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ einsetzen, was die Matrix

$$p(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, A^i \tag{3}$$

liefert. Zeigen Sie, dass der Funktionalkalkül (2) für Polynome die gleiche Matrix liefert wie Gleichung (3).
Kann diese Aussage auf Potenzreihen verallgemeinert werden (mit kurzer Begründung)?

b) Betrachten Sie die Spektralzerlegung

$$A = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{4}$$

von A, wobei $(|\psi_i\rangle)$ eine northonormale Eigenbasis von A ist. Geben Sie die Spektralzerlegung von $f(A)$ an.

c) Zeigen Sie, dass $[A, f(A)] = 0$.

d) Sei $t, \omega \in \mathbb{R}$ und

$$\sigma_y \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Verwenden Sie ihr Ergebnis aus 14b oder den Funktionlakalkül (2), um $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma_y \omega t}$ als Polynom in σ_y darzustellen.
Hinweis: Die Eigenwerte und -vektoren von σ_y müssen nicht nochmals hergeleitet werden.

e) Sei A eine hermitesche Matrix, die $A^2 = \mathbb{1}$ erfüllt. Verwenden Sie ausschließlich diese Eigenschaft und die Reihendarstellungen der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen, um zu zeigen, dass

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}At} = \cos(t)\mathbb{1} + \mathrm{i}\sin(t)A \tag{6}$$

gilt.

f) **Bonusaufgabe:** Allgemeiner, existiert fuer jede $d \times d$ Matrix A ein Polynom p mit Grad höchsten $d-1$, so dass $\mathrm{e}^A = p(A)$. Mit welchem berühmten Satz aus der linearen Algebra lässt sich die Aussage aus Aufgabenteil 14e auf diese Art verallgemeinern? (Was besagt dieser Satz?)

g) Finden Sie ein Beispiel zwei hermitescher Matrizen A und B, so dass

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+B)} \neq \mathrm{e}^{\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}. \tag{7}$$

15. **Zeitentwicklung** [2 + 1 + 1 + 1 + 3 + 2 Punkte]
Wir betrachten ein Zweiniveausystem mit Hamiltonoperator

$$H = \omega\sigma_y \tag{8}$$

wobei $\omega \in \mathbb{R}$ und σ_y wie in (5) gegeben. Zum Zeitpunkt $t = 0$ haben wir den Zustand $|\psi_0\rangle = |0\rangle$. In dieser Aufgabe rechnen wir in „natürlichen Einheiten“, d. h. mit $\hbar = 1$, und Ergebnisse aus Aufgabe 14 dürfen verwendet werden.

a) Wir schreiben den zeitentwickelten Zustand als

$$|\psi(t)\rangle = a_0(t)\,|0\rangle + a_1(t)\,|1\rangle\ , \tag{9}$$

wobei $|0\rangle$ und $|1\rangle$ wie gewohnt die Eigenzustände von $\sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ bezeichnen. Aus der Schrödingergleichung ergibt sich ein System von zwei Differentialgleichungen für a_0 und a_1.

Finden Sie eine Lösung unter Verwendung der Anfangsbedingung.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von σ_z zum Zeitpunkt t als Messergenis -1 zu erhalten? In welchem Zustand befindet sich das System unmittelbar nach der Messung?

c) Berechnen Sie nun den zeitentwickelten Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,|\psi_0\rangle$ unter expliziter Verwendung des Operators $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus dem letzten Aufgabenteil.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\sigma_z\rangle_{\psi(t)} = \langle\psi(t)|\,\sigma_z\,|\psi(t)\rangle$.

e) Wir wechseln nun ins Heisenbergbild. Zeigen Sie ausgehend von der Schrödingergleichung, dass eine zeitentwickelte Observable $A(t)$ im Heisenbergbild folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[H, A(t)]. \tag{10}$$

f) Überzeugen Sie sich, dass die zeitentwickelte Observable $\sigma_z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\sigma_z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ im Heisenbergbild die Heisenberggleichung (10) erfüllt. Berechnen Sie außerdem den Erwartungswert $\langle\sigma_z(t)\rangle_{\psi_0} = \langle\psi_0|\,\sigma_z(t)\,|\psi_0\rangle$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus dem Aufgabenteil 15d.