Freie Universität Berlin

Übungen zur Quantenmechanik

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 4

Abgabe: 16.11.2017 J. Eisert

10. **Fouriertransformation als unitäre Abbildung auf L^2** [2+1+3+1 Punkte]
Man kann die Fouriertransformation auf ganz $L^2(\mathbb{R})$ definieren. In dieser Aufgabe nehmen wir jedoch an, dass alle auftretenden Funktionen und ihre Fouriertransformierten integrierbar[1] sind. Dann sind Fouriertransformation $\mathcal{F}$ und inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}$ durch

$$\tilde{\psi}(p) \coloneqq \mathcal{F}[\psi](p) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

und

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(p)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\, \mathrm{d}p \tag{2}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}^2[\psi](x) = \psi(-x)$ und $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$ gelten.

b) Zeigen Sie, dass $\int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}(x)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, \tilde{\phi}(x)\, \mathrm{d}x$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass

$$\langle \psi, \phi \rangle = \langle \mathcal{F}[\psi], \mathcal{F}[\phi] \rangle\,. \tag{3}$$

Hinweis: Als Zwischenschritt kann man zeigen, dass $\mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi]^*] = \psi^*$ ist.

d) Man kann zeigen, dass die Fouriertransformation Gl. (3) für alle $\psi, \phi \in L^2(\mathbb{R})$ erfüllt. Wie nennt man eine solche Abbildung?

11. **Fouriertransformation und Ableitungen** [$2 + 1 + 1 + 3 = 7$ Punkte]
Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ eine differenzierbare Funktion mit Ableitungen $\psi' \in L^2$ die ausreichend schnell abfällt, so dass alle auftauchenden Integrale existieren.

a) Beweisen Sie den Ableitungssatz, d.h., dass $\mathcal{F}[\psi'](p) = \mathrm{i}p\mathcal{F}[\psi](p)$ ist.
Hinweis: Partielle Integration.

Die Ortsdarstellung des Impulsoperators P in *natürlichen Einheiten* ($\hbar = 1$) ist durch

$$P\,\psi(x) := -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) \tag{4}$$

gegeben.

b) Folgern Sie, dass $\tilde{P}\tilde{\psi}(p) = p\,\tilde{\psi}(p)$ ist, wobei $\tilde{P} \coloneqq \mathcal{F}P\mathcal{F}^{-1}$ die Impulsdarstellung von P ist.

c) Der Ortsoperator ist über $X\psi(x) \coloneqq x\,\psi(x)$ definiert. Berechnen Sie $[X, P]\psi$.

d) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{\psi}$ von $x \mapsto \psi(x) \coloneqq \mathrm{e}^{-\lambda|x|}$ für $\lambda > 0$. Skizzieren Sie ψ und $\tilde{\psi}$. Was passiert für $\lambda < 0$?

[1]Wir nenennen eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *integrierbar*, falls $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|\mathrm{d}x < \infty$.

e) Inwiefern entspricht ein Multiplikationsoperator einem 'diagonialen' Operator?

12. **Messungen im Kasten** $[1 + 2 + 2 + 2 = 7$ Punkte$]$
Wir betrachten ein quantenmechanisches Teilchen in eindimensionalen Kasten mit Wänden an den Positionen $x = \pm 1$. Es sollen die Eigenschaften der durch ψ_0 und ψ_1 gegeben Quantenzustände untersucht werden, wobei

$$\psi_0(x) := \begin{cases} \cos(\pi x/2) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 > |x| \end{cases} \tag{5}$$

und

$$\psi_1(x) := \begin{cases} \sin(\pi x) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 > |x| \end{cases} . \tag{6}$$

a) Zeigen Sie, dass ψ_0 und ψ_1 orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie für beide Zustände die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen links der Position $x = 0$ zu finden.

c) Nun betrachten wir eine Superpositon Ψ der beiden Zustände. Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Größen $\alpha = \langle\psi_0|\Psi\rangle$ und $\beta = \langle\psi_1|\Psi\rangle$ die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen links der Position $x = 0$ zu finden.
Hinweis: Die Gleichung

$$\int_{-1}^{0} \cos(\pi x/2)\sin(\pi x) = -4/3\pi \tag{7}$$

kann verwendet werden.

d) Bestimmen Sie die Werte α und β, so dass die Wahrscheinlichkeit das Teilchen links der Position $x = 0$ zu finden maximal wird.

13. **Unschärferelation eines freien Teilchens** $[1 + 3 + 2 = 6$ Punkte$]$
In dieser Aufgabe wollen wir die Heisenbergsche Unschärferelation an einem Beispiel berechnen. Dazu betrachten wir ein Teilchen in einer Dimension mit Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$. Dieses sei im "gequetschten" Zustand (*squeezed state*)

$$\psi(x) = N \exp\left(-\alpha(x - x_0)^2 + \mathrm{i}kx\right) , \tag{8}$$

mit $k, x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ und $N \in \mathbb{C}$.

a) Normieren Sie die Wellenfunktion ψ. Wieso kann $N \in \mathbb{R}$ gewählt werden?

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Orts- und Impulsoperator (X und P).

Hinweis: (i) Der Erwartungswert einer Funktion $f(X)$ im Zustand ψ ist gegeben durch $\langle f(X)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \psi^*(x) f(x)\psi(x)$, sowie einer Funktion $g(P)$ durch $\langle g(P)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}p\, \tilde{\psi}^*(p) g(p)\tilde{\psi}(p)$. (ii) Zur Berechnung des Erwartungswertes $\langle X^2\rangle$ könnten Sie partielle Integration sowie eine Stammfunktion von $x\mathrm{e}^{-ax^2}$ verwenden (ebenso für $\langle P^2\rangle$).

c) Überprüfen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation und interpretieren Sie das Ergebnis.