Freie Universität Berlin
Übungen zur Quantenmechanik
Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 3

Abgabe: 9.11.2017 J. Eisert

8. **Tensorprodukt** [Punkte: $2+2+2+1+2+4=13$]
Der Zustandsraum eines Quantensystems mit mehreren Freiheitsgraden ist durch das Tensorprodukt der Hilberträume der einzelnen Freiheitsgrade gegeben. Im Folgenden wollen wir uns mit der Konstruktion solcher Tensorräume befassen.

Sei $\mathcal{H}_1$ ein d-dimensionaler Hilbertraum mit Basis $B_1 = \{|i\rangle_1\}_{i=1}^d$ und $\mathcal{H}_2$ ein weiterer D-dimensionaler Hilbertraum mit Basis $B_2 = \{|i\rangle_2\}_{i=1}^D$.

Man konstruiert einen neuen Vektorraum $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ in dem man die Menge von Tupeln $B_1 \times B_2 = \{(|i\rangle_1, |j\rangle_2) : |i\rangle_1 \in B_1, |j\rangle_2 \in B_2\}$ als Basis benutzt. Man schreibt anstelle von $(|i\rangle_1, |j\rangle_2)$ meist $|i\rangle |j\rangle$ oder $|i,j\rangle$ oder $|i\rangle \otimes |j\rangle$. Letztere Schreibweise lässt sich zu einer bilinearen Verknüpfung $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ durch

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \coloneqq \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{D} \langle i \mid \psi\rangle \langle j \mid \phi\rangle |i,j\rangle \tag{1}$$

erweitern.

a) Welche Dimension hat der Vektorraum $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$? Geben Sie einen Hilbertraum an, der ein System aus n Spin-$1/2$-Teilchen beschreibt, welche Dimension hat dieser? (Mit Begründung.)

b) Zeigen Sie, dass die oben definierte Verknüpfung $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ linear in beiden Argumenten ist.

c) Ist $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ surjektiv? (Mit Begründung.)

Der Dualraum eines Vektorraums $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{H}^* \coloneqq \{\langle\psi| : \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \text{linear}\}$. $\mathcal{H}_1^*$ hat die zu B_1 duale Basis $\{\langle i|\}_{i=1}^d$, definiert durch die Orthonormalitätsrelation $\langle i \mid j\rangle = \delta_{ij}$. Der Dualraum hat selbst die Struktur eines Vektorraums.

d) Geben Sie eine orthornormale Basis des Dualraums von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ an.

e) Definieren Sie ein kanonisches Skalarprodukt für den Dualraum. Zeigen Sie, dass der Dualraum damit ein Hilbertraum ist. (Zur Vollständigkeit reicht ein kurzer Kommentar.)

Es gibt eine kanonische Identifikation von Vektoren in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*$ mit Operatoren von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_1$ auf die folgende Weise: Betrachten Sie $A = |i\rangle \langle j| \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*$. A lässt sich als Operator aufassen, wobei $A|\psi\rangle = |i\rangle \langle j \mid \psi\rangle$. Dies ist so naheliegend, dass Physiker normalerweise nicht darüber reden. Es erlaubt beliebige Operatoren A bezüglich der Basis $O' = \{|i\rangle\langle j|, 1 \le i,j \le d\}$ zu entwickeln:

$$A = \sum_{i,j=1}^{d} \langle i| A |j\rangle |i\rangle\langle j| \eqqcolon \sum_{i,j=1}^{d} A_{i,j} |i\rangle\langle j| \,. \tag{2}$$

Die Koeffizientenmatrix (A_{ij}) wird auch als darstellende Matrix des Operators A bezüglich der Basis O' bezeichnet.

Da wir das Tensorprodukt beliebiger Vektorräume definiert haben, verstehen wir auch was mit dem Tensorprodukt zweier Operatoren $A \otimes B \in (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*) \otimes (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^*)$ gemeint ist. $A \otimes B$ kann wiederum als Operator auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ aufgefasst werden. Überlegen Sie sich, wie dies im Detail funktioniert!

f) Zeigen Sie, dass für alle Operatoren $A, B, C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ und Vektoren $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ die folgenden Rechenregeln gelten:
   (i) $(A \otimes B)(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) = (A|\phi\rangle) \otimes (B|\psi\rangle)$
   (ii) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

9. **Kronecker-Produkt** [Punkte: $1+1+2+2+1=7$]
Eine übliche darstellende Matrix $(C_{r,s})$ des Tensorprodukts $A \otimes B$ zweier Operatoren A, B mit darstellenden Matrizen $(A_{i,j})$ und $(B_{k,l})$ ist gegeben durch das sogenannte Kronecker-Produkt $(A_{i,j}) \otimes (B_{k,l})$ der darstellenden Matrizen $(A_{i,j})$ und $(B_{k,l})$. Für das Tensorprodukt und das Kronecker-Produkt wird das gleiche Symbol verwendet. Für eine $(m \times n)$- und eine $(m' \times n')$-Matrix $(A_{i,j})$ und $(B_{k,l})$ definiert man nun das Kronecker-Produkt als die Blockmatrix

$$(C_{r,s}) = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot (B_{ij}) & A_{12} \cdot (B_{ij}) & \cdots & A_{1n} \cdot (B_{ij}) \\ A_{21} \cdot (B_{ij}) & A_{22} \cdot (B_{ij}) & \cdots & A_{2n} \cdot (B_{ij}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} \cdot (B_{ij}) & A_{m2} \cdot (B_{ij}) & \cdots & A_{mn} \cdot (B_{ij}) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

wobei $r = 1, \ldots, m\,m'$ und $s = 1, \ldots, n\,n'$. Behandelt man Vektoren als $n \times 1$ Matrizen erhält man mit dieser Definition auch eine Komponentendarstellung für das Tensorprodukt $a \otimes b$ zweier Vektoren a und b. Diese ist mit der Kronecker-Produktdarstellung von $A \otimes B$ verträglich, d. h. das Kronecker-Produkt erfüllt $(A \otimes B)(a \otimes b) = (Aa) \otimes (Bb)$ für beliebige Matrizen A, B und Vektoren a, b.

Im Folgenden sei $\mathcal{H}$ zweidimensional mit orthonormaler Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

a) Geben Sie die Komponentenvektoren der Produktbasisvektoren $\{|i\rangle \otimes |j\rangle\}_{i,j \in \{0,1\}}$ an.

b) Berechnen Sie das Kronecker-Produkt $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Geben Sie die darstellenden Matrizen von
   (i) $|-\rangle\langle -| \otimes |0\rangle\langle 0|$ mit $|-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$,
   (ii) $|1\rangle\langle 1| \otimes \mathrm{id}$

   an.

d) Vereinfachen Sie

$$(|-\rangle\langle -| \otimes |0\rangle\langle 0|)(|0\rangle \otimes |-\rangle) \tag{4}$$

   als Kronecker-Produkt und in der Bra-Ket-Notation.

e) Berechnen Sie

$$\| \, |0\rangle\,|1\rangle - |1\rangle\,|0\rangle \, \|. \tag{5}$$