Freie Universität Berlin
Übungen zur Quantenmechanik
Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 2

Abgabe: 02.11.2017 J. Eisert

5. **Diagonalisierung** [Punkte: $2 + 2 = 4$]
Jede hermitesche 2×2 Matrix M kann als

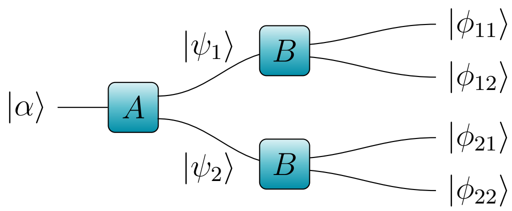
$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma^* & \beta \end{pmatrix} \tag{1}$$

geschrieben werden, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{C}$.

   a) Berechne Sie die Eigenwerten von M.

   b) Welche Eigenschaften haben die Eigenwerte? Wie hängen sie mit der Spur und Determinante von M zusammen?

6. **Messungen** [Punkte: $2 + 3 + 3 + 2 = 10$]
Seien σ_z und σ_x die in der Vorlesung definierten Pauli-Matrizen und $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ die orthonormale Eigenbasis zu σ_z, d.h. $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$ und $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$. Wir betrachten zwei aufeinander folgende Messungen des Zustandsvektors $|\alpha\rangle := \cos(\alpha/2)|0\rangle + \sin(\alpha/2)|1\rangle$.



Zuerst wird die Observable $A = \sigma_z$ gemessen.

   a) Was ist die Varianz $\Delta\sigma_z$ der Messung? Geben Sie die Werte von α an, für welche die Varianz verschwindet und kommentieren Sie das Ergebnis.

Die Zustände, in denen sich das System nach der ersten Messung von σ_z befinden kann, werden mit $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ und bezeichnet. Nach der ersten Messung wird die Observable $B = \sigma_\vartheta := \cos(\vartheta)\sigma_z + \sin(\vartheta)\sigma_x$ gemessen.

   b) In welchem Zustand befindet sich das System nach der zweiten Messung mit welcher Wahrscheinlichkeit? Berechnen Sie sowohl die durch $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ bedingten Wahrscheinlichkeiten, als auch die Gesamtwahrscheinlichkeiten.

Nun wird die Reihenfolge der Messungen vertauscht: Zuerst wird $A = \sigma_\vartheta$ im Anfangszustand $|\alpha\rangle$ gemessen und der Einfachheit halber setzten wir $\vartheta := \pi/2$. Die Zustände, in denen sich das System nach dieser Messung befinden kann, werden wieder mit $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ bezeichnet. In der zweiten Messung wird die Observable $B = \sigma_z$ gemessen.

   c) Berechnen Sie sowohl die durch $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ bedingten Wahrscheinlichkeiten, als auch die Gesamtwahrscheinlichkeiten für alle vier möglichen Ausgänge der zweiten Messung.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das System nach der zweiten Messung in welchem Zustand? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 6b.

7. **Der Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen L^2**

[Punkte: $2 + 2 + 1 + 1 = 6$]

Sowohl der Orts- als auch der Impulsfreiheitsgrad eines quantenmechanischen Teilchens werden durch Wellenfunktionen beschrieben. In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der zugehörigen Hilbertraumstruktur. Wir nennen eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *quadratintegrierbar*, wenn $|\psi|^2 := \psi^*\psi$ integrierbar ist, d.h. $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty$ gilt. Die Menge solcher Funktionen wird mit $L^2(\mathbb{R})$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $\psi + \lambda\phi \in L^2(\mathbb{R})$ für alle $\psi, \phi \in L^2(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, wobei $(\psi + \phi)(x) := \psi(x) + \phi(x)$ und $(\lambda\psi)(x) := \lambda\psi(x)$.

Damit ist $L^2(\mathbb{R})$ ein komplexer Vektorraum. Mit

$$\langle\psi, \phi\rangle := \int_{\mathbb{R}} \psi(x)^* \, \phi(x) \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

definieren wir eine Sesquilinearform auf dem Vektorraum $L^2(\mathbb{R})$. Für alle $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ist $\phi \mapsto \langle\psi, \phi\rangle$ linear und es gilt auch $\langle\psi, \phi\rangle = \langle\phi, \psi\rangle^*$ (braucht nicht gezeigt zu werden).

b) Zeigen Sie, dass für jedes $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\langle\psi, \psi\rangle = 0$ eine Nullmenge[1] $N \subset \mathbb{R}$ existiert, so dass $\psi(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus N$ gilt.
Hinweise: i) Kontraposition. ii) Für $f := |\psi|^2$ zerlege $A := \{f > 0\}$ in $A_0 := \{1 \leq f\}$ und $A_j := \{1/(j+1) \leq f < 1/j\}$, wobei z.B. $\{f > 0\} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ bezeichnet. Es darf kommentarlos angenommen werden, dass $\int_{A_j} \mathrm{d}x$ wohldefiniert ist.

In diesem Sinne ist die durch Gl. (2) gegebene Sesquilinearform positiv definit, d.h., Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, werden als gleich betrachtet. Das ist sinnvoll, weil Wellenfunktionen in experimentell überprüfbaren Aussagen immer nur unter Integralen auftauchen. Insgesamt halten wir fest, dass Gl. (2) ein Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R})$ definiert. $L^2(\mathbb{R})$ ist auch *vollständig* und somit tatsächlich ein Hilbertraum.

c) Finden Sie ein nicht-triviales Beispiel für zwei orthogonale Funktionen.

d) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die nicht quadratintegrierbar ist.

[1] Eine *Nullmenge* N ist eine Menge, die $\int_N \mathrm{d}x = 0$ erfüllt.