Freie Universität Berlin
Übungen zur Quantenmechanik
Wintersemester 2017/18
Übungsblatt 1

Abgabe: 26.10.2017 J. Eisert

1. **Bra-Ket Notation** [2 + 2 + 2 Punkte]
In der Vorlesung wurde die Bra-Ket, oder Dirac-Notation eingeführt. Wir betrachten den dreidimensionalen komplexen Hilbertraum $\mathbb{C}^3$ mit der Standardorthonormalbasis $\{|1\rangle,\ |2\rangle, |3\rangle\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ und definieren die folgenden Ket-Vektoren:

$$|\alpha\rangle \coloneqq 7i|1\rangle - |2\rangle + 3|3\rangle \qquad |\beta\rangle \coloneqq 4\mathrm{i}|1\rangle + 2|2\rangle$$

   (a) Geben Sie die Bra-Vektoren $\langle\alpha|$ und $\langle\beta|$ sowie die übliche Vektordarstellung von $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{C}^3$ an.
   (b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle\alpha|\beta\rangle$ und $\langle\beta|\alpha\rangle$ sowie die normierte Version von $|\alpha\rangle$.
   (c) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von $|\alpha\rangle\langle\beta|$. Wann ist diese Matrix hermitesch?

2. **Blochkugeldarstellung** [1 + 3 + 2 Punkte]
In der Vorlesung wurde die Blochkugeldarstellung für Zweiniveauquantensysteme eingeführt, die wir hier noch einmal im Detail nachvollziehen wollen. Zur Erinnerung: Ein normierter Vektor in $\mathbb{C}^2$ ist gegeben durch

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{1}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, wobei $|0\rangle$ und $|1\rangle$ wiederum die Standardbasisvektoren in $\mathbb{C}^2$ bezeichnen.

   (a) Zeigen Sie, dass der Vektor $|\psi\rangle$ von (1) tatsächlich normiert ist.
   (b) Da Quantenzustände nur bis auf eine globale Phase definiert sind identifizieren wir Vektoren die sich nur um eine globale Phase unterscheiden miteinander. Somit beschreiben die Vektoren $|\psi\rangle$ und $e^{i\phi}|\psi\rangle$ per Definition denselben Quantenzustand. Zeigen Sie, dass wir aus diesem Grund für jeden Quantenzstand eines Zweiniveausystems $|\Psi\rangle$ zwei Parameter $\theta \in [0, \pi]$ und $\gamma \in [0, 2\pi]$ finden können, so dass

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\gamma}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \tag{2}$$

   gilt.
   (c) Fassen wir die Variablen θ und γ als Winkel auf, parametrisieren sie eine Kugel in $\mathbb{R}^3$, die sogenannte Blochkugel. Verwenden Sie ein Computeralgebrasystem (z.B. Mathematica) um die Blochkugeldarstellung der Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ $|+\rangle$, $-|0\rangle$ und $e^{-42i}|+\rangle$ zu visualisieren. Wo liegen zueinander orthogonale Zustände in der Kugel?

3. **Hilberträume und Skalarprodukt** [1+1+2 Punkte]
Um ein physikalisches System zu beschreiben, müssen wir die Menge der erlaubten Systemzustände festlegen. In der klassischen Mechanik ist dieser Raum der erlaubten Konfigurationen beispielsweise der Phasenraum des Systems in dem jeder Punkt (x, p) aus Ort x und Impuls p einem möglichen Systemzustand entspricht. Der Konfigurationsraum d-dimensionaler Quantensystem hingegen ist gegeben durch $\mathbb{C}^d$. Im Folgenden wollen wir uns ein wenig vertrauter mit seinen Eigenschaften machen. Neben der Vektorraumstruktur können wir auf $\mathbb{C}^d$ ein Skalarprodukt via

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{d} \overline{x}_k y_k \tag{3}$$

einführen, was $\mathbb{C}^d$ zu einem Hilbertraum macht. Wir wollen zeigen, dass (3) tatsächlich ein Skalarprodukt definiert. Zeigen Sie dazu, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{C}^d$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

(a) Linearität im zweiten Argument: $\langle x, \alpha y + z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

(b) Hermitizität: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(c) Positive Definitheit: $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann wenn $x = 0$.

4. **Matrizen und Spur** [1+1+2 Punkte]
Quantenmechanische Messungen an endlichdimensionalen Quantensystemen werden durch hermitesche Matrizen beschrieben.

(a) Wir betrachten den Hilbertraum $\mathbb{C}^d$. Für eine $d \times d$ Matrix A ist die adjungierte Matrix $A^\dagger$ durch die Gleichung

$$\langle x, A\, y \rangle = \langle A^\dagger x,\, y \rangle \tag{4}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $A^\dagger = (A^*)^T$ diese Gleichung erfüllt.

(b) Zeigen Sie für beliebige Matrizen A, B, dass $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ gilt.

Die Spur einer $d \times d$ Matrix A mit Matrixelementen A_{ij} ist als

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{d} A_{ii}\ . \tag{5}$$

definiert.

(c) Zeigen Sie, dass für jede Matrix A und beliebige invertierbare Matrix S

$$\mathrm{Tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{Tr}(A) \tag{6}$$

gilt und kommentieren Sie warum dies bedeutet, dass die Spur basisunabhängig ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.